Holonomic Quantum Fields概説 (Analytic Varieties及びStratified Spaces上の諸問題)

三輪, 哲二

数理解析研究所講究録
372巻 1979年 134-140

Holonomic Quantum Fields 概説

京大数研　三輪 哲二

以下は，佐藤幹夫・神保道夫両氏との最近の研究の紹介であり，研究集会以後の進展が中心である。

§1　回転の理論

Wを内積$\langle\ ,\ \rangle$を持つN次元直交空間，$\Lambda(W)$, $A(W)$, $O(W)$, $G(W)$をそれぞれ外積代数，クリフォード代数，直交群，クリフォード群とする。$\langle ww'\rangle+\langle w'w\rangle=\langle w,w'\rangle$を満たす双一次形式$\langle\ \ \rangle$が与えられると，同型$Nr: A(W)\longrightarrow\Lambda(W)$が定義される。$a\in A(W)$に対して$Nr(a)$の定数部分を$\langle a\rangle$と書き，$a$の期待値と呼ぶ。完全列

$$(1)\qquad 1\rightarrow GL(1,\mathbb{C})\longrightarrow G(W)\rightarrow O(W)\longrightarrow 1$$

により，$G(W)$の元gは，それの引き起こすWの回転Tにより定数倍を除き特徴づけられる。すなわち$v_1,\cdots,v_N$をWの基底$J=(\langle v_j,v_k\rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$ $K=(\langle v_jv_k\rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$を内積と期待値の表とし，$E_+=J^{-1}K$, $E_-=J^{-1}\,{}^tK$とおく。$E_\pm$が射影にな

っている時，$Nr(g)$ は次の公式で与えられる。

(2) $$Nr(g) = \langle g \rangle \exp(\rho/2)$$

$$\langle g \rangle^2 = nr(g) \det(E_+ + E_- T)$$

$$\rho = \sum_{j,k=1}^{N} R_{jk} v_j v_k \ , \ RJ = (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(E_+ Y_- + E_- Y_+)$$

ここで $Y_\pm$ は次の条件を満たす行列とする。

(3) $$T = Y_+^{-1} Y_- \ , \ E_- Y_+^{\pm 1} E_+ = 0 \ , \ E_+ Y_-^{\pm 1} E_- = 0$$

$nr(g)$ は定数倍の不定さを調節する因子で，ここでは説明を省く。$g \otimes g^{-1} \in G(W \oplus W)$ は，$T \in O(W)$ から定数倍の不定さなしに決まる。W が無限次元の時，$\det(E_+ + E_- T)$ が発散しても，$\langle g \otimes g^{-1} \rangle = \langle g \rangle \cdot \langle g^{-1} \rangle = \det(E_+ + E_- T) \cdot \det(E_+ + E_- T^{-1})$ は有限の答を与える事が多い。

§2. 自由場

ここでは，無限次元の W としてどんなものを取るかを説明する。S 次元ミンコフスキー空間 X^{Min} におけるディラック方程式を考える。

(4) $$(i\partial\!\!\!/ - m) w(x) = 0 \ , \ \overline{w}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = 0$$

ここで $\partial\!\!\!/ = \sum_{\mu=0}^{s-1} \gamma^\mu \partial_\mu$ ，$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ，γ^μ は $r \times r$ のディラック行列とする。$w = {}^t(w_1, \cdots, w_r)$ $\overline{w} = (\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_r)$ は たて あるいは よこに並べた

スピノルだが，¯は複素共役を意味しない。(4)を満たす w の全体を W，$\bar{w}$ の全体を $\overline{W}$ とし 直和 $\widetilde{W} = \overline{W} \oplus W$ に次の内積を入れる。

(5) $\langle \hat{w}, \hat{w}' \rangle = \int_{\text{spacelike}} \left(\bar{w}(x)\, d^{s-1}x\, w'(x) + \bar{w}'(x)\, d^{s-1}x\, w(x) \right)$

ここで $d^{s-1}x = \sum_{\mu=0}^{s-1} \gamma^\mu dx_{\hat{\mu}}$, $dx_{\hat{\mu}} = (-)^\mu dx^0 \wedge \cdots \overset{\mu}{\vee} \cdots \wedge dx^{s-1}$

(5)の被積分項は $s-1$ 閉形式で，積分は空間的超曲面上で行なう。$r \times r$ 行列

(6) $iS(x) = \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} e^{-ip\cdot x} \varepsilon(p_0)\, 2\pi \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m)$

は $(i\not{\partial}_x - m)\, iS(x-x') = 0$, $iS(x-x')(i\overleftarrow{\not{\partial}}_{x'} + m) = 0$

を満たす。固定したxにつき $iS(x-x')$ の第α行を考えると，x'の函数として $\overline{W}$ に属すのでこれを $\psi_\alpha(x)$ と書く。同様に，固定したx'につき第β列をxの函数と考えたものを $\overline{\psi}_\beta(x')$ と書く。これらは，相互作用のないフェルミ粒子を表わし，自由場と呼ばれる。内積は

(7) $\langle \psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(x') \rangle = iS(x-x')_{\alpha\beta}$

で与えられる。次の期待値を採用する。

(8) $\langle \psi_\alpha(x)\, \overline{\psi}_\beta(x') \rangle = iS^{(+)}(x-x')_{\alpha\beta}$

$iS^{(+)}(x) = \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} e^{-ip\cdot x} \theta(p_0)\, 2\pi \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m)$

この時，$E_\pm$ は，(4)の解を $\mathrm{Im}\, x^0 \lessgtr 0$ で正則な解の境界値に分解する作用素になる。

§3. 外場による散乱

ここでは $\widetilde{W}$ における回転をどのように与えるかを述べる。$A(x) = (A_\mu(x))_{\mu=0,\cdots,s-1}$ を $x^0 \longrightarrow \pm\infty$ で消える $r\times r$ 行列の S 個の組とし，この $A(x)$ を外場とするディラック方程式を考える。

(9) $\quad (i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/(x) - m)w(x) = 0, \quad \overline{w}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + A\!\!\!/(x) + m) = 0$

(9) の解 $w(x)$, $\overline{w}(x)$ から次のようにして2通りの (3) の解が作られる。

(10) $$w_{\substack{in\\out}}(x) = w(x) - \int d^sx'\, S_{\substack{ret\\adv}}(x-x')A\!\!\!/(x')w(x')$$

$$\overline{w}_{\substack{in\\out}}(x) = \overline{w}(x) - \int d^sx'\, \overline{w}(x')A\!\!\!/(x')S_{\substack{adv\\ret}}(x'-x)$$

ここで $S_{\substack{ret\\adv}}(x) = \pm\theta(x^0)S(x)$ であり $x^0 \longrightarrow \pm\infty$ で $w(x) \longrightarrow w_{\substack{out\\in}}(x)$, $\overline{w}(x) \longrightarrow \overline{w}_{\substack{out\\in}}(x)$ となる。$(\overline{w}_{in}, w_{in})$ を $(\overline{w}_{out}, w_{out})$ に移す変換は $\widehat{W}$ の回転になる。これを $T[A]$，対応するクリフォード群の元を $\varphi[A]$ と書く。$\tau[A] = \langle\varphi[A]\rangle$, $\tau^*[A] = \langle\varphi[A]^{-1}\rangle$ に対して次の変分公式が成り立つ。

(11) $$\delta\log\tau[A] + \delta\log\tau^*[A]$$
$$= -\int d^sx\, \delta A(x)\,\Psi(x,x;A),$$
$$\Psi(x,x';A) = S_c^A(x,x') + S_c^{*A}(x,x') - S_{ret}^A(x,x') - S_{adv}^A(x,x')$$

ここで S_c^A, S_c^{*A} etc. は外場 $A(x)$ のもとでの適当な境界条件を満たすグリーン函数であるが，定義は省略する。ただ，$S_c^A(x,x')\Big|_{x=x'}$，$S_c^{*A}(x,x')\Big|_{x=x'}$ etc. は発散するが，$\Phi(x,x';A)\Big|_{x=x'}$ は有限の値を取る事を注意しておく。

§4. Wick 回転と Riemann−Hilbert の問題

X^{Min} における空間的な超曲面を Γ とし，$A(x)$ の台が Γ 上に退化した極限を考える。すなわち，回転 T が

$$w_{out}(\xi) = M(\xi)w_{in}(\xi),\ \overline{w_{out}}(\xi) = \overline{w_{in}}(\xi)M(\xi)^{-1}$$

$(\xi\in\Gamma)$ で与えられるとしよう。ここで，$w_{\substack{in\\out}}(x)$ は，ディラック方程式の解をたてに N 個，$\overline{w}_{\substack{in\\out}}(x)$ はよこに N 個並べたものとし，$M(\xi)$ は Γ 上で実解析的な $N\times N$ 行列とする。この時 (2) 式に出てくる

$$F_{++} = Y_+^{-1}(-E_-)Y_+,\quad F_{+-} = Y_+^{-1}E_+Y_-$$

$$F_{-+} = Y_-^{-1}(-E_-)Y_+,\quad F_{--} = Y_-^{-1}E_+Y_-$$

の核函数を $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$　$(\varepsilon,\varepsilon'=\pm)$ とすると，これらは，$\varepsilon\,\mathrm{Im}\,x^0<0$，$\varepsilon'\,\mathrm{Im}\,x^{0\prime}<0$ なる領域に解析接続される。そこで，$X^{Min}\longleftrightarrow \mathrm{Im}\,x^0=0$ から $X^{Euc}\longleftrightarrow \mathrm{Re}\,x^0=0$ $(\mathrm{Im}\,x^0=-x^s$ とおく$)$ に移って（これを Wick 回転という），そこで $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ を特徴づける事にする。

X^{Euc} 内の有界領域を D^+, その境界を Γ とする。Γ 上で定義された $N\times N$ 行列を $M(\xi)$ とする。次の性質を満たす $(x,x')\in X^{Euc}-\Gamma$ で定義された $rN\times rN$ 行列 $w(x,x')$ を (Γ, M) に対するグリーン函数という。(高次元の Riemann − Hilbert の問題)

(i) $(-\not{\partial}_x+m)\,w(x,x')=\delta^s(x-x')$

(ii) $|w(x,x')|=O(e^{-m|x|})\qquad |x|\longrightarrow\infty$

(iii) $w(\xi^+,x')=M(\xi)\,w(\xi^-,x')\qquad(\xi\in\Gamma)$

但し $w(\xi^{\pm},x')=\lim\limits_{D^{\pm}\ni x\to\xi} w(x,x')$, $D^-=X^{Euc}-D^+-\Gamma$

Mが1に近いという仮定のもとに, グリーン函数は, ただひとつ存在し, 以下の性質でも特徴づけられる。

(i)' $w(x,x')(\not{\partial}_{x'}+m)=\delta^s(x-x')$

(ii)' $|w(x,x')|=O(e^{-m|x'|})\qquad |x'|\longrightarrow\infty$

(iii)' $w(x,\xi'^+)=w(x,\xi'^-)\,M(\xi')^{-1}\qquad(\xi'\in\Gamma)$

X^{Min} における Γ として $x^0=0$ を取ると, D^+が有界ではないが, Γ は X^{Euc} における $x^s=0$ とみなせる。この時 $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ の解析接続したものが, ちょうど $w(x,x')$ になる。

次に Γ を $\Gamma^{\delta p}=\{\xi^{\delta p}=\xi+\delta p(\xi)\mid \xi\in\Gamma\}$ に微小変形する事を考える。$\Gamma^{\delta p}$ 上での $M^{\delta p}$ は $M^{\delta p}(\xi^{\delta p})=M(\xi)$ と，不変な形で与える。この時 $(\Gamma^{\delta p}, M^{\delta p})$ に対するグリーン函数を $w^{\delta p}(x,x')$ とすると，微小変分 $\delta w(x,x')=w^{\delta p}(x,x')-w(x,x')$ は次の式で与えられる。

$$\delta w(x,x')=\int_\Gamma d\sigma(\xi)\, w(x,\xi)\sum_{\mu=1}^{s}\delta p^{\mu}(\xi)(n_\mu \partial - n\partial_\mu)M(\xi)\cdot w(\xi,x')$$

特に重要なのは，Γ 上の超曲面（X^{Euc} の中では余次元2）B が与えられ，B の外で $M(\xi)=1$，B の中で $M(\xi)=M$ となる場合である。この時 $w(x,x')$ は，$X^{Euc}-B$ で多価のディラックの解となり，B のまわりで与えられたモノドロミー M を持つ。M を変えずに B を変形した時の変分公式も，上と同様に得られる。